第 3 节 求带参函数的单调区间、极值、最值（★★★）

强化训练

1．（2022 • 四川模拟 • ★★）设 $f(x)=a\ln x-x+1(a\in\mathbf{R})$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

解： 由题意，$f'(x)=\dfrac{a}{x}-1=\dfrac{a-x}{x}(x>0)$，

（$f'(x)=0\Rightarrow x=a$，但 a 是否在定义域内，与 a 的正负有关，故据此讨论）

①当 $a\le 0$ 时，（如图 1，在 $(0,+\infty)$ 上，$a-x<0$）

$a-x\le -x<0$，所以 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

②当 $a>0$ 时，（如图 2，$a-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上先正后负）

$f'(x)>0\Leftrightarrow a-x>0\Leftrightarrow 0<x<a$，$f'(x)<0\Leftrightarrow a-x<0\Leftrightarrow x>a$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，在 $(a,+\infty)$ 上单调递减.

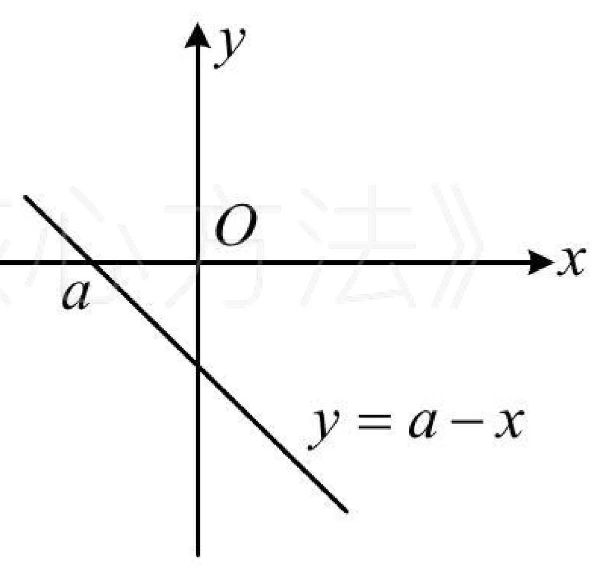


图1

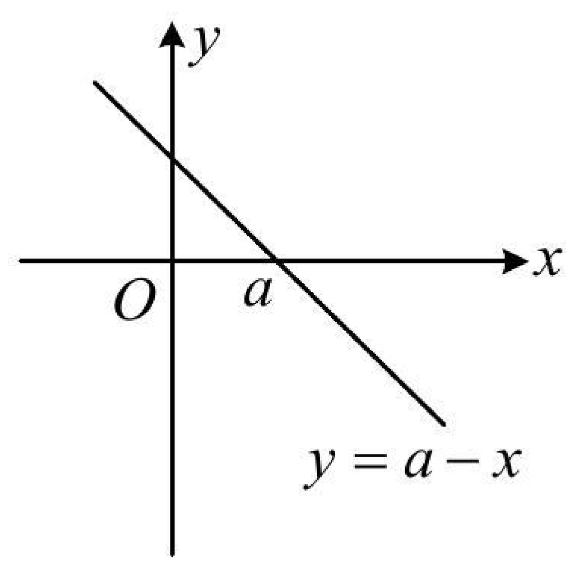


图2

2．（★★）设 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+(2-a)e^{x}-2ax-1(a\in\mathbf{R})$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

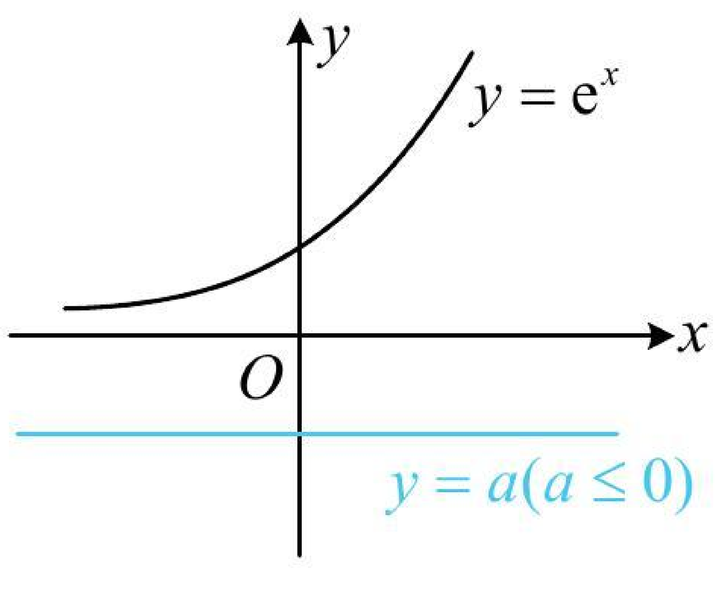
解： $f'(x)=e^{2x}+(2-a)e^{x}-2a=(e^{x}+2)(e^{x}-a)$，

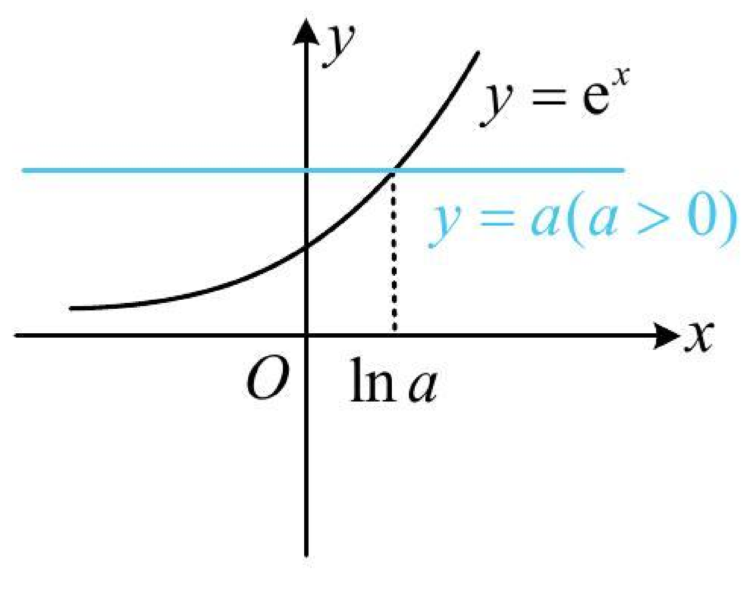
（$f'(x)$的符号与 $e^{x}-a$ 这个因式的符号相同，该因式是否有零点由 a 的正负决定，如图，故据此讨论）

①当 $a\le 0$ 时，$e^{x}-a>0$，$e^{x}+2>0$，所以 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

②当 $a>0$ 时，$f'(x)>0\Leftrightarrow x>\ln a$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x<\ln a$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增.





3．（2021 • 浙江卷节选 • ★★★）设 a，b 为实数，且 $a>1$，函数 $f(x)=a^{x}-bx+e^{2}(x\in\mathbf{R})$，求 $f(x)$ 的单调区间.

解：由题意，$f'(x)=a^x\ln a-b$，（注意到 $a>1$，所以 $a^x>0$，$\ln a>0$，从而 $a^x\ln a\in(0,+\infty)$，那么 b 的正负就决定了 $f'(x)$ 是否有零点，故据此讨论）

①当 $b\le 0$ 时，因为 $a>1$，所以 $a^x\ln a>0$，从而 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

②当 $b>0$ 时，$f'(x)>0\Leftrightarrow a^x\ln a>b\Leftrightarrow a^x>\dfrac{b}{\ln a}\Leftrightarrow x>\log_a\dfrac{b}{\ln a}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x<\log_a\dfrac{b}{\ln a}$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\log_a\dfrac{b}{\ln a})$ 上单调递减，在 $(\log_a\dfrac{b}{\ln a},+\infty)$ 上单调递增.

4．（★★★）已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{a-2}{2}x^2-ax+1(a\in\mathbf{R})$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

解：由题意，$f'(x)=2x^2+(a-2)x-a=(2x+a)(x-1)$，

（两根 $-\dfrac{a}{2}$ 和 1 的大小不确定，故讨论两根的大小）

①当 $a<-2$ 时，$-\dfrac{a}{2}>1$，$f'(x)>0\Leftrightarrow x<1$ 或 $x>-\dfrac{a}{2}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 1<x<-\dfrac{a}{2}$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,-\dfrac{a}{2})$ 上单调递减，在 $(-\dfrac{a}{2},+\infty)$ 上单调递增；

②当 $a=-2$ 时，$f'(x)=2(x-1)^2\ge 0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

③当 $a>-2$ 时，$-\dfrac{a}{2}<1$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x<-\dfrac{a}{2}$ 或 $x>1$，$f'(x)<0\Leftrightarrow -\dfrac{a}{2}<x<1$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\dfrac{a}{2})$ 上单调递增，在 $(-\dfrac{a}{2},1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

5．（2022・郑州期末・★★★）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-ax+a\ln x+1(a\in\mathbf{R})$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

解：由题意，$f'(x)=x^2-x-a+\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^3-x^2-ax+a}{x}=\dfrac{x^2(x-1)-a(x-1)}{x}=\dfrac{(x-1)(x^2-a)}{x}$，$x>0$，

（a 的正负决定因式 x^2-a 在定义域上是否有零点，故先分 $a\le 0$ 和 $a>0$ 两类讨论）

①当 $a\le 0$ 时，$x^2-a>0$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>1$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<1$，

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

（当 $a>0$ 时，$f'(x)$ 可变形成 $\dfrac{(x-1)(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}{x}$，可只看 $(x-1)(x-\sqrt{a})$ 这部分，两个零点分别为 1 和 $\sqrt{a}$，又需讨论它们的大小）

②当 $0<a<1$ 时，$0<\sqrt{a}<1$，$f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}{x}$，

所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\sqrt{a}$ 或 $x>1$，$f'(x)<0\Leftrightarrow\sqrt{a}<x<1$，

故 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{a},1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

③当 $a=1$ 时，$f'(x)=\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x}\ge 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

④当 $a>1$ 时，$\sqrt{a}>1$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<1$ 或 $x>\sqrt{a}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 1<x<\sqrt{a}$，

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,\sqrt{a})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增.

6.（★★★）已知函数 $f(x)=(x-3)\mathrm{e}^{x}-ax^{2}+4ax+1(a\in\mathbf{R})$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

解： $f'(x)=(x-2)\mathrm{e}^{x}-2ax+4a=(x-2)(\mathrm{e}^{x}-2a)$，

（接下来对 a 讨论，先按 $\mathrm{e}^{x}-2a$ 有无零点，分 $a\le 0$ 和 $a>0$ 两类考虑）

①当 $a\le 0$ 时，$\mathrm{e}^{x}-2a>0$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>2$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x<2$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增；

（当 $a>0$ 时，$f'(x)$ 有零点 2 和 $\ln(2a)$，故再讨论 2 与 $\ln(2a)$ 的大小，即讨论 a 与 $\frac{\mathrm{e}^{2}}{2}$ 的大小）

②当 $0<a<\frac{\mathrm{e}^{2}}{2}$ 时，$\ln(2a)<2$，（2 和 $\ln(2a)$ 将实数集划分成了三段，故分三段分别判断 $f'(x)$ 的正负）

若 $x<\ln(2a)$，则 $x-2<0$，$\mathrm{e}^{x}-2a<\mathrm{e}^{\ln(2a)}-2a=0$，所以 $f'(x)>0$，

若 $\ln(2a)<x<2$，则 $x-2<0$，$\mathrm{e}^{x}-2a>\mathrm{e}^{\ln(2a)}-2a=0$，所以 $f'(x)<0$，

若 $x>2$，则 $x-2>0$，$\mathrm{e}^{x}-2a>\mathrm{e}^{2}-2a>0$，所以 $f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(2a))$ 上单调递增，在 $(\ln(2a),2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增；

③当 $a=\frac{\mathrm{e}^{2}}{2}$ 时，$f'(x)=(x-2)(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{2})$，若 $x<2$，则 $x-2<0$，$\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{2}<0$，所以 $f'(x)>0$，

若 $x>2$，则 $x-2>0$，$\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{2}>0$，所以 $f'(x)>0$，结合 $f'(2)=0$ 知 $f'(x)\ge 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

④当 $a>\frac{\mathrm{e}^{2}}{2}$ 时，$\ln(2a)>2$，若 $x<2$，则 $x-2<0$，$\mathrm{e}^{x}-2a<\mathrm{e}^{2}-2a<0$，所以 $f'(x)>0$，

若 $2<x<\ln(2a)$，则 $x-2>0$，$\mathrm{e}^{x}-2a<\mathrm{e}^{\ln(2a)}-2a=0$，所以 $f'(x)<0$，

若 $x>\ln(2a)$，则 $x-2>0$，$\mathrm{e}^{x}-2a>\mathrm{e}^{\ln(2a)}-2a=0$，所以 $f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递增，在 $(2,\ln(2a))$ 上单调递减，在 $(\ln(2a),+\infty)$ 上单调递增.